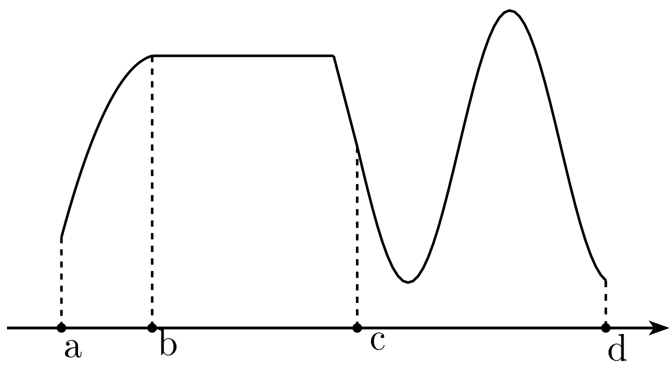
Funktionen

1. Monotonie und Extremstellen von Funktionen

a) Gib für jedes der Intervalle $[a; b]$, $[b; c]$, $[c; d]$ an, ob die dargestellte Funktion f (streng) monoton steigend, (streng) monoton fallend oder nicht monoton ist!



b) Es sei $a < b < c < d$. Zeichne den Graphen einer Funktion, die in $[a; b]$ monoton steigend, in $[b; c]$ streng monoton fallend und in $[c; d]$ streng monoton steigend ist!

c) Was kann über das Monotonieverhalten der Funktion f im Intervall $[0; 4]$ ausgesagt werden, wenn folgende Funktionswerte bekannt sind?

$f(3) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(1) = 4$

d) Gib alle <u>globalen</u> und <u>lokalen</u> Extremstellen der Funktion f, deren Graph, die in der obigen Abbildung dargestellt ist, im Intervall $[a; d]$ an!

e) Welches Monotonieverhalten zeigt die Funktion

e_1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = x^2 - 1$?
e_2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = -x^3$?
e_3) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = {}^{10}\log(x)$?
e_4) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = -3 \cdot 2^x$?

f) Welche Extremstellen hat die Funktion

f_1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = -x^4 + 1$?
f_2) $f : [-3; 2] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = x^5$?
f_3) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = x^{1/2}$?
f_4) $f : [1; 27] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = -x^{1/3}$?

g) Wie lautet die exakte Definition für eine Funktion f, die im Intervall $[a; b]$ streng monoton fallend ist?

h) Beschreibe den Unterschied zwischen einer lokalen und einer globalen Maximumstelle!

2. Funktionsgleichungen

Ordne den folgenden Graphen die entsprechenden Funktionsgleichungen zu!

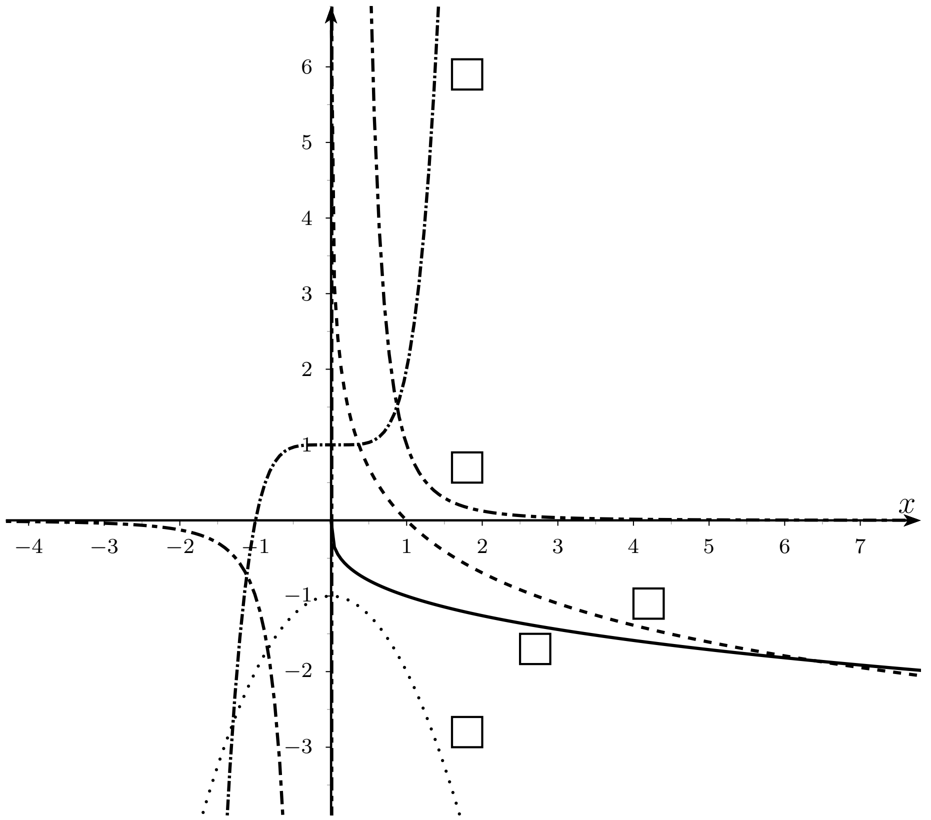
-) $f_1(x) = -x^2 - 1$

-) $f_2(x) = -\ln(x)$

-) $f_3(x) = x^5 + 1$

-) $f_4(x) = \frac{1}{x^3}$

-) $f_5(x) = -x^{1/3}$



3. Exponentielles Wachstum bzw. Abnahme

a) Eine Größe A ändert sich mit der Zeit t (in Sekunden) gemäß $A(t) = 20000 \cdot 0{,}5^{1{,}8 \cdot t}$. Bestimme A zum Zeitpunkt $t = 10$ Sekunden!

b) Eine Größe B soll einem exponentiellen Wachstumsgesetz der Form $B(x) = B_0 \cdot a^x$ gehorchen. Stelle eine Formel für $B(x)$ auf, wenn $B_0 = 2$ und $B(8) = 512$ gilt!

c) Erstelle den Graph der Funktion $f : [0; 10] \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$! Ermittle dazu eine Wertetabelle für die x-Werte 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10!

d) Eine Größe f unterliegt einer exponentiellen Zunahme mit der Zeit t (in Stunden). Bestimme eine Formel für f, wenn sich f in drei Stunden verdoppelt und $f(0) = 0{,}25$ gilt!

e) Eine Größe f unterliegt einer exponentiellen Abnahme mit der Zeit t. Bestimme eine Formel für f, wenn sich f in fünf Stunden halbiert und $f(0) = 5780$ gilt!

f) Beschreibe, was die Größen a und c in der Formel $f(x) = c \cdot a^x$ bedeuten!

g) Was könnten Gründe sein, warum ein Modell eines unbeschränkten exponentiellen Wachstums für einen Vorgang in der Natur unrealistisch ist? Erläutere deine Meinung anhand eines Beispiels!

h) Nenne Vorgänge die zumindest näherungsweise durch die Modelle einer exponentiellen Abnahme bzw. eines exponentiellen Wachstums beschrieben werden können!

4. Diskretes logistisches Wachstum

Erstelle unter der Annahme, dass die Größe f ein logistisches Wachstum zeigt mittels der Rekursionsformel $f(t+10) = f(t) + 0{,}002 \cdot f(t) \cdot [500 - f(t)]$ für $f(0) = 1$ zu den Zeitpunkten 0; 10; 20; 30; ...; 120 den Graphen von f (Runde die Funktionswerte auf zwei Dezimalstellen)!

5. Änderungsmaße einer Funktion

a) Gib die absolute Änderung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = x^2$ im Intervall $[2; 4]$ an!

b) Gib die relative Änderung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = 0{,}2^x$ im Intervall $[0; 3]$ an!

c) Gib die mittlere Änderungsrate der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = {}^{10}\log(x)$ im Intervall $[1; 100]$ an!

d) Gib den Änderungsfaktor der Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = 0{,}1 \cdot x^{2/3}$ im Intervall $[8; 27]$ an!