Kreuzprodukt

1. Multiple Choice
Kreuze an, welche der folgenden Aussagen deiner Meinung nach richtig sind! (Mindestens ein Kreuz muss gesetzt werden!)

◯ $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ◯ $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) || \vec{a}$ ◯ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ◯ $|\vec{a} \times \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

2. Flächeninhalt

a) Begründe, warum $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$ mit $\alpha = \sphericalangle \vec{a}\vec{b} \in [0,\pi]$ gilt!
(*Hinweis*: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms; Flächeninhalt des Parallelogramms: $A = a \cdot h_a$ mit $a = |\vec{a}|$)

b) Zeige, dass für den Flächeninhalt A des von den Vektoren $\vec{a} = (a_1|a_2|a_3)$ und $\vec{b} = (b_1|b_2|b_3)$ aufgespannten Parallelogramms gilt:
$A = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$
(*Hinweis*: Berechne $|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \right|$ und fasse geeignet die Summanden zusammen!)

3. Rechtsschraubregel
Der Vektor $\vec{a}$ zeige in Richtung der positiven x-Achse, der Vektor $\vec{b}$ zeige in Richtung der positiven y-Achse und der Vektor $\vec{c}$ zeige in Richtung der positiven z-Achse. In welche Richtung zeigt der folgende Vektor?

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) $-\vec{b} \times \vec{c}$

c) $-\vec{c} \times (-\vec{a})$

4. Drehmoment
In der Physik ist das Drehmoment $\vec{M}$ wie folgt definiert: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Dabei ist $\vec{r}$ der Abstand vom Drehzentrum zu dem Punkt in dem die Kraft $\vec{F}$ angreift. Berechne das Drehmoment für $\vec{r} = (2|3|7)\,\mathrm{m}$ und $\vec{F} = (1|0|1)\,\mathrm{N}$!

5. Richtig oder falsch? Kreuze an!
Falls eine Aussage deiner Meinung nach falsch ist, gib eine Begründung an!

a) Für $\vec{a},\vec{b}(\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^3$ gilt stets: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$

◯ Richtig ◯ Falsch

b) Es gibt $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ für die gilt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

◯ Richtig ◯ Falsch

c) Ist $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ (mit $\vec{a},\vec{b},\vec{c}(\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^3$) sowie $\vec{a}$ nicht parallel zu $\vec{b}$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{c} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ gilt.

◯ Richtig ◯ Falsch

6. Lückentext

Ergänze den folgenden Text sinngemäß durch jeweils eine der in Klammer stehenden Auswahlmöglichkeiten!

Sind zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^3$ parallel, dann ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ _____ ($<$; $=$; $>$) 0. Ist $\vec{a} \perp \vec{b}$, dann ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ _____ ($<$; $=$; $>$) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Trifft keiner der beiden Fälle zu, dann ist $|\vec{a} \times \vec{b}|$ _____ ($<$; $=$; $>$) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Es ist somit $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ______________ (stets; manchmal; nie) eine nicht negative Zahl, wogegen $\vec{a} \times \vec{b}$ ______________ (stets; manchmal; nie) eine nicht negative Zahl ist.

7. Vier in sechs

Ordne den vier Kreuzprodukten der linken Tabelle den entsprechenden Vektor der rechten Tabelle zu!

(1)	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
(2)	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
(3)	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
(4)	$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$(\ldots)$	$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$
$(\ldots)$	$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$(\ldots)$	$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$
$(\ldots)$	$\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$
$(\ldots)$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
$(\ldots)$	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

8. Zwei in fünf

Welche zwei Aussagen gelten für alle $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ aus dem $\mathbb{R}^3$? (Es sei $\lambda \in \mathbb{R}^*$.)

$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$	○
$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$	○
$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \times \lambda\vec{b}$	○
$\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\lambda\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$	○
$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{b} \times (\lambda\vec{a})$	○

9. Interpretiere!

Es seien $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ aus dem $\mathbb{R}^3$. Was lässt sich aus $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ für die Lage der Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ zueinander folgern?