Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

1. Geraden

Gegeben ist die Gerade $g : X = (1|3|0) + \lambda \cdot (2|1|0)$. Kreuze an, wie die folgenden Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 bzgl. der Geraden g liegen!

$$g_1 : X = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_2 : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_3 : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad g_4 : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

	g_1	g_2	g_3	g_4
parallel verschieden	◯	◯	◯	◯
deckungsgleich	◯	◯	◯	◯
schneidend	◯	◯	◯	◯
windschief	◯	◯	◯	◯

2. Multiple Choice

Bei den folgenden Aussagen kann mehr als eine der zur Auswahl stehenden Antworten richtig sein. Kreuze die deiner Meinung nach richtigen Antworten an! (Mindestens ein Kreuz muss gesetzt werden!)

a) Gegeben sei die Ebene $\epsilon_1 : 2x + 3y - z = 1$. Für welche Werte a, b, c ist die Ebene $\epsilon_2 : ax + by + cz = 2$ nicht parallel zu ϵ_1?

◯ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ◯ $a = -2c$, $b = -3c$ ◯ $a = 0$; $b, c \in \mathbb{R}$ ◯ $a = b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

b) Welche der folgenden Vektoren können Normalvektoren einer Ebene sein, die senkrecht auf die y/z -Ebene steht?

◯ $(0|0|-1)$ ◯ $(0|1|0)$ ◯ $(1|1|0)$ ◯ $(0|1|1)$

c) Eine Gerade g geht durch den Punkt $(1|1|1)$. Welche der folgenden Vektoren kann Richtungsvektor von g sein, so dass g die x/y-Ebene nicht schneidet?

◯ $(0|0|1)$ ◯ $(2|3|0)$ ◯ $(0|5|0)$ ◯ $(0|0|-1)$

d) Eine Gerade g geht durch den Punkt $(1|1|1)$. Welche der folgenden Vektoren kann Richtungsvektor von g sein, so dass g windschief zur x-Achse liegt?

◯ $(1|1|1)$ ◯ $(0|1|1)$ ◯ $(1|0|1)$ ◯ $(1|1|0)$

e) Für die Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ zweier Geraden g und h im Raum gilt: $\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h = 0$. Welche Lagebeziehung können g und h haben?

◯ parallel versch. ◯ deckungsgleich ◯ schneidend ◯ windschief

3. Richtig oder falsch? Kreuze an!
Gib für jede deiner Entscheidungen eine Begründung an!

a) Haben zwei Ebenen ϵ, τ mit den Normalvektoren $\vec{n}_\epsilon$, $\vec{n}_\tau$ den Punkt P gemeinsam, dann können $\vec{n}_\epsilon$ und $\vec{n}_\tau$ parallel sein.

◯ Richtig ◯ Falsch

b) Haben eine Ebene ϵ mit dem Normalvektor $\vec{n}_\epsilon$ und eine Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{r}_g$ einen Punkt gemeinsam, dann muss $\vec{r}_g$ parallel zu $\vec{n}_\epsilon$ sein.

◯ Richtig ◯ Falsch

c) Ebenen, die keinen Punkt gemeinsam haben, müssen dieselben Normalvektoren haben.

◯ Richtig ◯ Falsch

d) Für zwei windschiefe Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ kann $\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h = 0$ gelten.

◯ Richtig ◯ Falsch

4. Ebenen

a) Gib Normalvektordarstellungen zweier Ebenen an, deren Schnittgerade gleich der x-Achse ist!

b) Gib Normalvektordarstellungen dreier Ebenen an, die sich im Punkt $(1|1|1)$ schneiden!

c) Gib eine Normalvektordarstellung einer Ebene an, die parallel zur x/z-Ebene ist und von dieser den Abstand 2 hat!

d) Gib eine Normalvektordarstellung der Ebene ϵ an, in der das Dreieck A, B, C (siehe Abbildung) liegt! Gib auch eine Normalvektordarstellung jener Ebene an, die parallel zu ϵ ist und den Punkt $(0|0|0)$ beinhaltet! Welchen Abstand haben diese Ebenen? (*Hinweis*: Stelle eine Gerade g normal auf ϵ durch $O = (0|0|0)$ auf und ermittle den Schnittpunkt S von g und ϵ! Anschließend bestimme $|\overrightarrow{OS}|$!)