Verkettung von Funktionen

1. Verkettung bilden

Bilde die Verkettung $g \circ f$ der gegebenen reellen Funktionen f und g! Gib den größtmöglichen Definitionsbereich von f an!

a) $f(x) = x^3$, $g(y) = \sqrt{y}$

b) $f(x) = x - 1$, $g(y) = \frac{1}{y+2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(y) = \frac{1}{y+1}$

d) $f(x) = \sin(x)$, $g(y) = \frac{1}{y^2}$

e) $f(x) = x(x-1)$, $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

2. Umkehrfunktion zuordnen

Welche der folgenden Funktionen sind Umkehrfunktionen zueinander? Ordne zu!

$f_1 : [0; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = x^2$

$f_2 : (0; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = \ln(x)$

$f_3 : (0; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = \frac{1}{x^2}$

$f_4 : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_4(x) = 2x - 3$

$g_1 : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto g_1(y) = \mathrm{e}^y$

$g_2 : [0; \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto g_2(y) = \sqrt{y}$

$g_3 : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto g_3(y) = \frac{y+3}{2}$

$g_4 : (0; \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto g_4(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

3. Richtig oder falsch? Kreuze an!

Falls eine Aussage deiner Meinung nach falsch ist, gib eine Begründung an!

a) Jede reelle Funktion besitzt eine Umkehrfunktion.

◯ Richtig ◯ Falsch

b) Sind f und g reelle Umkehrfunktionen zueinander, dann gilt für alle x aus dem Definitionsbereich von g: $(f \circ g)(x) = 1$.

◯ Richtig ◯ Falsch

c) Die reelle Funktion $f : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x$ ist ihre eigene Umkehrfunktion.

◯ Richtig ◯ Falsch

d) Die reelle Funktion $f : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^x$ ist Umkehrfunktion der Funktion $g : (0; \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto g(y) = \ln(y)$.

◯ Richtig ◯ Falsch

e) Die reelle Funktion $f : (0; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ ist Umkehrfunktion der Funktion $g : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, y \mapsto g(y) = y^2$

◯ Richtig ◯ Falsch

4. Umkehrfunktion gesucht
Gib die Umkehrfunktion zu folgender Funktion an!

a) $f_1 : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = 3x$
b) $f_2 : (-\infty; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = \frac{x}{2} - 1$
c) $f_3 : [0; \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = \sqrt[3]{x}$
d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_4(x) = \frac{1}{x-2}$

5. Skizze von Umkehrfunktion
Skizziere zur folgenden Funktion die Umkehrfunktion!

a) $f_1 : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = \sin(x)$
b) $f_2 : [0; 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = x^2$
c) $f_3 : \left[\frac{1}{4}; 4\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = \frac{1}{x}$
d) $f_4 : [-1; 2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_4(x) = \mathrm{e}^x$

6. Multiple Choice
Im Folgenden kann mehr als eine der zur Auswahl stehenden Antworten richtig sein. Kreuze die deiner Meinung nach richtigen Antworten an! (Mindestens ein Kreuz muss gesetzt werden!)

a) Welche Funktion hat auf $\mathbb{R}^+$ eine Umkehrfunktion?

○ $f(x) = x^2$ ○ $f(x) = \mathrm{e}^x$ ○ $f(x) = \sin(x)$ ○ $f(x) = x$

b) Welche Verkettung von Funktionen ist für $x \in \mathbb{R}$ erlaubt?

○ $\ln(x^2)$ ○ $\mathrm{e}^{(x^2)}$ ○ $\sqrt{x^2}$ ○ $(\sqrt{x})^2$

c) Es sei $x \in \mathbb{R}^+$ und $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = \mathrm{e}^x$, $f_4(x) = \ln(x)$. Welche Aussage ist korrekt?

○ $(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x) = x$ ○ $(f_1 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_4)(x) = x$
○ $(f_1 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_2)(x) = x$ ○ $(f_2 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_1)(x) = x$

d) Es seien f und f^{-1} beliebige Umkehrfunktionen zueinander. Welche Aussage ist korrekt?

○ $f(x) \cdot f^{-1}(x) = x$ ○ $\dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)} = x$
○ $f(f^{-1}(x)) = x$ ○ $f^{-1}(f(x)) = x$

7. Zwei in fünf
Kreuze die beiden richtigen Aussagen an!

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ hat eine Umkehrfunktion.	○
Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ hat eine Umkehrfunktion.	○
Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$ hat eine Umkehrfunktion.	○
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin(x)$ hat eine Umkehrfunktion.	○
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ hat eine Umkehrfunktion.	○

8. Lückentext

Ergänze den folgenden Text sinngemäß durch jeweils eine der in Klammer stehenden Auswahlmöglichkeiten!

Es seien $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ und $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$, dann ist $(f \circ g)(x) =$ _____ (0; 1; x) bzw. $(g \circ f)(x) =$ _____ (0; 1; x). Insbesondere ist $(g \circ f)(0) =$ _____ (0; 1; x) und $(g \circ f)(1) =$ _____ (0; 1; x). Somit ist g die __________ (transverse; inverse; perverse) Funktion von f. Die Graphen der beiden Funktionen liegen symmetrisch zur _______________ (x-Achse; y-Achse; 1. Mediane).

9. Vier in sechs

Es sei $x \in \mathbb{R}^+$. Ordne den Funktionstermen der linken Tabelle die Funktionsterme der entsprechenden Umkehrfunktionen der rechten Tabelle zu!

(1)	$\frac{1}{x}$
(2)	$\frac{1}{x^2}$
(3)	$\frac{1}{x} - 1$
(4)	$\frac{1}{x+1}$

$(\ldots)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$(\ldots)$	$\frac{1}{x} + 1$
$(\ldots)$	$\frac{1}{x} - 1$
$(\ldots)$	$\frac{1}{x}$
$(\ldots)$	$\frac{1}{x-1}$
$(\ldots)$	$\frac{1}{x+1}$